Análise Matemática

CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS

U1 – S1

Nesta seção vamos conhecer os números naturais. Vamos aprender a construí-los e entender a origem das operações de adição e multiplicação.

Números naturais

A ideia central da construção dos números naturais é a noção de que todo número natural possui um sucessor (o equivalente de "somar 1" ao número). Esse sucessor deve ser único para cada número, e números diferentes devem ter sucessores diferentes. Assim, a partir do primeiro elemento do conjunto (o número 1), todos os outros serão obtidos (a questão se o zero deve ou não ser incluído nos números naturais não vem ao caso no momento; do ponto de vista descrito acima bastaria, ao inseri-lo, considerá-lo como o primeiro elemento do conjunto, cujo sucessor será 1). Formalmente, essa construção se dá por meio dos **axiomas de Peano**, nome esse que faz referência ao matemático Giussepe Peano (1858 - 1932).

Vamos conhecer os axiomas. Para isso, vamos considerar $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais (a ser construído) e postulamos que $\mathbb{N}$ tem as seguintes propriedades (LIMA et al., 2006):

Todo número natural possui um único sucessor e números naturais distintos possuem sucessores distintos. Isto é, existe uma função injetora $s:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ tal que , para cada $n\in\mathbb{N}$, *s(n)* é o sucessor de *n*.

Essas três propriedades são as chamadas de axiomas de Peano e são suficientes para a construção dos números naturais e das operações de adição e multiplicação, como veremos. Do primeiro axioma segue que, se $m \neq n$, então $s(m) \neq s(n)$, isto é, a primeira propriedade faz referência às funções injetoras, ou seja, não há dois elementos distintos no domínio com a mesma imagem, e também fala sobre a sequência de números que possuem sucessores (é imprescindível para a boa fixação dos conteúdos que você, estudante, faça no papel **todas** as passagens mencionadas aqui e que não foram demonstradas, e refaça todas as demonstradas, de preferência consultando o texto somente ao final da demonstração). O segundo axioma trata especificamente do número 1, que apesar de possuir um sucessor é o único que não é sucessor de nenhum outro. O terceiro axioma, denominado **princípio da indução**, é a base para a construção das operações de adição e multiplicação, assim como a demonstração de diversas propriedades dos números naturais.

Vamos então a essas operações. A **adição**, que associa ao par *(m,n)* o número *m+n*, é definida da seguinte maneira a partir dos axiomas de Peano:

$$m + 1 = s(m)$$

$$m + s(n) = s(m + n)$$

Ao substituir *s(n)* por *n + 1* e *s(m + n)* por *(m + n) + 1*, obtemos:

$$m + (n + 1) = (m + n) + 1$$

Note que utilizamos aqui somente as definições dadas nos axiomas 1 e 2, de modo que a construção não depende de nenhuma outra estrutura que não as já apresentadas. Ainda mais, as equações acima são válidas para qualquer número natural. Já a **multiplicação** de dois números, que associa ao par *(m,n)* o número $m \cdot n$, é obtida a partir das seguintes definições:

$$m \cdot 1 = m$$

$$m \cdot s(n) = m \cdot n + m$$

onde a operação de multiplicação deve ser feita sempre primeiramente à operação de adição.

Assim temos, rearranjando as equações:

$$m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$$

Pelo terceiro axioma de Peano, o princípio de indução, mostra-se que:

$m + (n + p) = (m + n) + p$ (associatividade da adição)

$m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$ (distributividade – relaciona a adição com a multiplicação)

$m + n = n + m$ (comutatividade da adição)

$m \cdot n = n \cdot m$ (comutatividade da multiplicação)

Você conheceu as principais características do conjunto dos números naturais. Lembre-se de que é importante destrinchar todas as passagens do texto que estudamos para seu aprendizado.